Curs 6

Centre de masă (greutate)

1. Centrul de masă (greutate) al sistemului de puncte materiale

Centrele de masă sunt caracteristici intrinseci ale sistemelor de puncte materiale. Poziția centrului de masă depinde de modul de repartizare al masei în sistemul de puncte materiale și se situează în zona cu masa mai mare.
Se dă un sistem de puncte materiale $\mathrm{A_i}$ de mase $\mathrm{m_i}$. Masa totală a sistemului este $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.
Fiecărui punct îi corespunde o greutate $\vec{\mathrm{G}}_\mathrm{i} = m_i \vec{\mathrm{g}}$, în care $\vec{\mathrm{g}}$ reprezintă accelerația gravitațională.

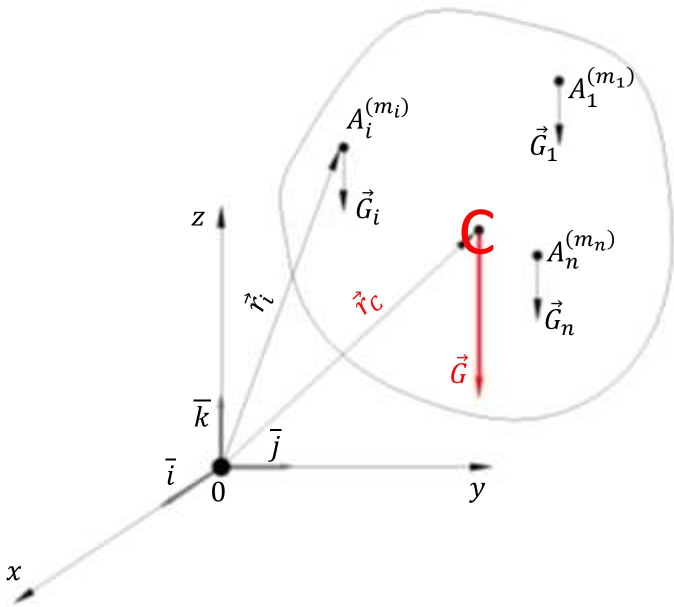

Figura 1 – Sistem de puncte materiale

Greutatea totală a sistemului de puncte materiale este $G = \sum_{i=1}^{n} G_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\, g$
Greutățile $\vec{\mathrm{G}}_\mathrm{i}$ formează un sistem de forțe distribuite pe sistemul de puncte materiale și paralele legate. Centrul de greutate este al sistemului de puncte materiale este centrul forțelor paralele legate $\vec{\mathrm{G}}_\mathrm{i}$, adică punctul de aplicație al vectorului rezultant $\vec{G}$, greutatea sistemului material.
În aplicațiile de centre de greutate se cere să se determine poziția centrului de greutate (C).
Poziția lui se determina prin vectorul de poziție $\vec{r}_c$ cu relația (21) din cursul 4:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \, \vec{r}_i}{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \, \vec{r}_i}{G} \quad (1)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, g\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i \, g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (2)$$

Din relațiile (1) si (2) rezultă identitatea dintre centrul de greutate și centrul de masă. Dacă în sistemul de referință ales scriem expresiile analitice ale vectorilor din relația (2), rezultă coordonatele centrului de masă (C).

$$\vec{r}_c = x_c\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath} + z_c\vec{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath} + z_i\vec{k}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad (3)$$

2. Momente statice

Prin definiție, momentul static al unui punct material $\mathrm{A_i}$ de masă $\mathrm{m_i}$, în raport cu un punct (pol) O din spațiu este vectorul:

$\vec{\mathrm{S}}_{\mathrm{oi}} = m_i \, \vec{r}_i$

În cazul sistemului de puncte materiale $\mathrm{A_i}$ de mase $\mathrm{m_i}$ momentul static total este:

$\vec{\mathrm{S}}_{\mathrm{o}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$ (4)

Astfel relația (2) devine

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{S}_O}{M} \quad (5)$$

Din relația (5) rezultă $\vec{S}_O = M\vec{r}_c$ (6)

Relația (6) exprimă teorema momentelor statice care se enunță astfel:

Momentul static total al unui sistem de puncte materiale în raport cu un pol O, este egal cu momentul static al centrului său de masă în care se consideră concentrată toată masa sistemului. Considerând relațiile (4) și (6) avem:

$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = M\vec{r}_c$ (7).

Proiectând relația (7) pe axele sistemului de referință cu originea în polul O rezultă:

$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = M x_c$, $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = M y_c$, $\sum_{i=1}^{n} m_i z_i = M z_c$ (8)

În relațiile (8) sumele din partea stângă reprezintă momentele statice în raport cu planele de coordonate.

Dacă se alege punctul O în centrul de masă al sistemului (C), $\mathrm{O} \equiv \mathrm{C}$ și $\vec{r}_c = \vec{0}$,rezultă că momentul static al sistemului de puncte materiale în raport cu centrul său de masă este nul. La fel și momentele statice față de axe sau plane care conțin centrul de masă.

3. Proprietăți ale centrelor de masă:

- poziția centrului de masă este o caracteristică intrinsecă a sistemului material și depinde de modul de repartizare a masei în sistem
- dacă mărimile tuturor maselor se multiplică sau se reduc cu același scalar $\lambda \neq 0$ poziția centrului de masă nu se modifică
- dacă un sistem material are un plan de simetrie, atunci centrul de masă se află în acel plan
- dacă un sistem material are o axă de simetrie, atunci centrul de masă se află pe acea axă
- dacă un sistem material are un pol de simetrie, atunci centrul de masă se află în acel pol

4. Metoda punctelor echivalente pentru determinarea poziției centrului de masă

Considerăm un sistem material ce constituie domeniul (D) pe care îl împărțim în subdomenii (D_1),(D_2),…,(D_n), masele acestora fiind (M_1),(M_2),…,(M_n). Se cunosc pozițiile centrelor de masă ale subdomeniilor prin vectorii de poziție $\vec{r}_k$. Aceste centre de masă sunt numite puncte echivalente. Aplicând relația (2) în acest caz, poziția centrului de masă se determină cu relația:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} M_k} \quad (9)$$

Dacă în sistemul de referință ales scriem expresiile analitice ale vectorilor din relația (9), rezultă coordonatele centrului de masă (C) al domeniului (D).

$$\vec{r}_c = x_c\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath} + z_c\vec{k}$$

$$\vec{r}_k = x_k\vec{\imath} + y_k\vec{\jmath} + z_k\vec{k}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_k\, x_k}{\sum_{i=1}^{n} M_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_k\, y_k}{\sum_{i=1}^{n} M_k}, \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_k\, z_k}{\sum_{i=1}^{n} M_k} \quad (10)$$

Observații

- dacă domeniul (D) este un corp omogen atunci $M_k = \rho V_k$ în ρ este densitatea corpului $\rho = \text{const.}$, iar V este volumul său. Relația (9) devine în acest caz:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} V_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} V_k} \quad (11)$$

- dacă domeniul (D) este o suprafață omogenă atunci $M_k = \rho A_k$, iar A este suprafața sa. Relația (9) devine în acest caz:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} A_k} \quad (12)$$

- dacă domeniul (D) este o linie omogenă atunci $M_k = \rho L_k$, iar L este lungimea sa. Relația (9) devine în acest caz:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} L_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} L_k} \quad (13)$$

- dacă domeniul (D) prezintă goluri, acestea se consideră cu masă negativă (doar din punct de vedere matematic), masa putând fi reprezentată de volum, suprafață sau lungime.